

# Consulta Pública

## Número mínimo de iterações no modelo NEWAVE

Bernardo Freitas Paulo da Costa\*<sup>1</sup>

<sup>1</sup>*Escola de Matemática Aplicada, Fundação Getulio Vargas (FGV EMAP)*

26 de março de 2026

### 1 Considerações iniciais

O algoritmo de Programação Dual Dinâmica Estocástica (PDDE) utilizado no modelo NEWAVE é um algoritmo iterativo dividido em etapas *forward* e *backward*, a primeira explorando o espaço de estados do problema, e a segunda construindo **cortes** cujo propósito é aproximar as funções de custo futuro do problema. Desta forma, o algoritmo de PDDE constrói uma *sequência de aproximações*  $\mathfrak{Q}_t^k$  das funções de custo futuro  $V_t$  para cada etapa de tempo  $t$  e iteração  $k$ . A cada iteração, as funções se aproximam da função real  $V_t$ , no sentido preciso que

$$\mathfrak{Q}_t^k \leq \mathfrak{Q}_t^{k+1} \leq V_t \quad \text{para todo } t \text{ e todo } k. \quad (1)$$

Estas aproximações (e, na prática, as funções  $\mathfrak{Q}_t^K$  construídas na última iteração  $K$ , contendo todos os cortes) são um produto crucial do algoritmo de PDDE, e são utilizadas como insumo do modelo DECOMP, definindo as condições de fronteira para o planejamento mais detalhado fornecido por este modelo (cujo resultado será, em seguida, utilizado pelo modelo DESSEM). Desta forma, é fundamental que estas funções de custo futuro resultem em uma boa aproximação de  $V_t$ .

Entrando em detalhes, atualmente o modelo NEWAVE executa cada etapa *forward* explorando 200 cenários, e portanto cada etapa *backward* gera 200 novos cortes para as funções  $\mathfrak{Q}_t^k$ . Também vale notar que o modelo NEWAVE representa as 163 usinas hidrelétricas individualmente nos primeiros 12 meses do horizonte de planejamento, e depois em 12 Reservatórios Equivalentes de Energia (REEs). Ademais, a adoção do modelo PARp-A, modelando as afluências a partir de 12 meses de tendência hidrológica, resulta num espaço de estados de dimensão  $163 \times 13 = 2119$ .

Geometricamente, o algoritmo de PDDE aproxima um região em dimensão 2120 (o gráfico das funções de custo futuro), através de hiperplanos. Assim, a pergunta da consulta pública poderia ser

---

\*Este texto reflete apenas a opinião do autor, e não necessariamente a posição da instituição a que ele pertence.

interpretada como: “desejamos exigir que o número mínimo de hiperplanos passe de 6 000 para 10 000?” Como veremos a seguir, esta questão é complexa por duas razões: primeiro, porque estes hiperplanos, em geral, não são construídos de forma ótima (por exemplo, *não são tangentes* ao gráfico das funções  $V_t$ , e muitas vezes estão *concentrados* em uma região do espaço de estados). Segundo porque, mesmo o uso “perfeito” de uma quantidade de hiperplanos (entre 6 000 e 10 000) que é da ordem da dimensão do espaço subjacente ( $\approx 2\,000$  nos estágios do final do primeiro ano) seria apenas suficiente apenas para uma aproximação com qualidade  $\mathcal{O}(\sqrt{d})$  de uma região convexa em geral.

Assim, começaremos esta contribuição ressaltando o aspecto *backwards* da convergência do algoritmo de PDDE, que explica porque as funções de custo futuro dos **primeiros meses** do horizonte de planejamento são as **últimas a convergir**. Passaremos então à questão da maldição da dimensionalidade, fundamentando a análise de complexidade do problema de aproximação das funções de custo futuro, subjacente à PDDE. Também aproveitaremos para lembrar que a inclusão de mais cortes nem sempre resulta em uma *política* de melhor qualidade.

Depois, aprofundaremos as questões relacionadas à qualidade da solução, que esperamos indiquem direções de melhoria dos modelos atuais. O ponto de partida será a própria definição de qualidade da solução, recuperando a construção de um *gap* de otimalidade, e que, mesmo sendo mais complexo no caso de problemas com aversão ao risco, é um critério mais adequado para garantir a convergência de um algoritmo de otimização do que o número de iterações realizadas. Abordaremos daí a questão da estabilidade da solução, não em relação às iterações, mas em relação à amostragem de cenários: uma amostragem com poucas realizações da incerteza a cada estágio (“aberturas”), apesar de atraente do ponto de vista computacional, pode resultar em uma solução que esteja sobre-ajustada a estas amostras, e portanto será pouco apropriada para uma realização real da incerteza — que nunca será igual a uma amostra específica.

Enfim, como todas as propostas (mais iterações, mais amostras, e a construção de cotas superiores) envolvem um maior esforço computacional, reforçaremos a possibilidade de usar modelos de horizonte infinito e periódico, como uma etapa *preliminar* ao modelo NEWAVE (incluindo, assim, um modelo de mais longo prazo ainda) que, por ser mais simples e não precisar calibrar um “horizonte suplementar”, pode mitigar o esforço computacional total ao longo da cadeia de modelos, e ainda resultar em políticas de melhor qualidade.

## 2 A convergência do algoritmo de PDDE

Da mesma maneira que a construção das funções de custo futuro, a *convergência do algoritmo de PDDE* também ocorre de forma *backwards*. Ou seja, a convergência das funções de custo futuro do **final** do horizonte de planejamento é **necessária** para a convergência das funções de custo futuro de estágios anteriores.

Do ponto de vista teórico, isto pode ser visto em ambas estratégias de demonstração já apresentadas

na literatura. A primeira, dita “por exaustão”, já indicada no artigo original de Pereira e Pinto [PP91], e depois explorada em [CP99, PG08], argumenta que, como as funções de custo futuro são lineares por partes, há um número finito de cortes necessários a cada estágio. A segunda estratégia, dita “por aproximação”, busca garantir que as funções  $\mathcal{Q}_t^k$  estejam  $\epsilon$ -próximas das funções  $V_t$ , ou seja, que  $\max_{x \in X} |\mathcal{Q}_t^k(x) - V_t(x)| \leq \epsilon$ , como visto em [Lan20, FL23a], dentre outros. Independente da estratégia adotada, a garantia de convergência da função de custo futuro de um estágio  $k$  é feita *por indução regressiva* a partir da hipótese de convergência da função do estágio  $k + 1$ .

Mas isso também pode ser visto na prática, pois o “fluxo de informações” do valor da água parte do final do horizonte para o início, e assim as funções de custo futuro dos primeiros meses do horizonte de planejamento dependem da qualidade das funções de custo futuro dos *meses seguintes* do horizonte, e assim por diante. Em particular, isso explica porque as implementações da PDDE atualizam a estimativa da função do estágio  $k$  *após atualizar a função do estágio  $k + 1$* , e não após cada etapa *forward* (o que também seria possível, como em [PG08], que prova a convergência para ambos os modos de construção dos cortes).

Assim, gostaríamos de ressaltar que, apesar de a função de custo futuro utilizada pelo DECOMP não necessitar a exploração de um espaço de estados muito grande, visto que a incerteza dois meses à frente não é tão grande, a função de custo futuro que será usada pelo DECOMP é **uma das últimas a convergir no algoritmo de PDDE**.

### 3 A maldição da dimensionalidade

Apesar de o algoritmo de PDDE tratar da explosão combinatória de cenários, que é da ordem de  $A^T$ , onde  $A$  é o número de aberturas a cada estágio, e  $T$  é o número de etapas, a construção das funções de custo futuro é afetada pela **dimensão do estado**.

Por se tratar de um problema de aproximação de funções convexas, a complexidade do algoritmo de programação dinâmica estocástica ainda é **exponencial** na dimensão do estado, o que se torna um grande desafio seja pela modelagem com usinas individualizadas, seja pela inclusão da tendência hidrológica de 12 meses em um modelo com 12 reservatórios equivalentes. A estimativa de complexidade que podemos encontrar em [Lan20, FL23a] é que são necessárias  $N$  iterações para garantir uma aproximação de qualidade  $\epsilon$  das funções de custo futuro, para

$$N = T \times \mathcal{O} \left( \frac{L}{\epsilon} \right)^d, \quad (2)$$

onde  $L$  é a (maior) constante de Lipschitz das funções de custo futuro e  $d$  é a dimensão do espaço de estados. Esta estimativa corresponde à ideia de garantir a qualidade de aproximação das funções através da garantia de qualidade em pontos próximos, e a dimensão do espaço de estados impacta no número de vizinhos a serem considerados numa dada região. Por esta razão, a convergência do algoritmo de PDDE com um espaço de estados de dimensão tão alta é um grande desafio, tanto teórico como prático, e as estimativas teóricas disponíveis implicam que problemas práticos desta dimensão são “essencialmente intratáveis”.

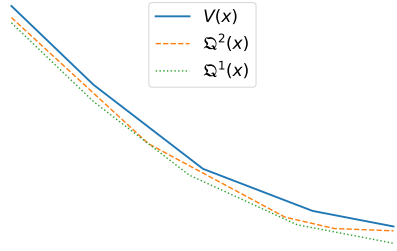
Aqui vale um comentário adicional: o uso de um modelo mais detalhado para representar as usinas hidrelétricas individualmente é interessante por diversas razões, mas isto tem um impacto direto na dimensão do espaço de estados, e portanto na convergência do algoritmo de PDDE. Assim, é bem possível que este modelo *mais detalhado*, e portanto mais complexo, acabe resultando em políticas (e funções de custo futuro) com *menor qualidade*, pois a contrapartida é que estes modelos mais detalhados — e de dimensão maior — necessitam, também, construir funções de custo futuro com mais detalhes, e portanto, com mais cortes, para garantir uma boa aproximação de  $V_t$ . Se nos basearmos na estimativa de complexidade (2) apresentada acima, ela diz que, para aproximar com a mesma qualidade uma função num espaço de estados com o **dobro** do tamanho é necessário o **quadrado** do número de cortes.

Na prática, é sabido que o algoritmo de PDDE *não precisa convergir* sobre todo o espaço de estados. Afinal, não é importante saber com precisão o custo futuro de uma decisão que não será tomada, ou seja, de um ponto do espaço de estados que não será visitado, para tomar a decisão ótima: basta saber que o custo será grande demais para compensar uma eventual redução do custo imediato. Entretanto, com o aumento do detalhe da representação das usinas hidrelétricas, a quantidade de estados “razoáveis” aumenta: não é tão diferente armazenar água em um reservatório ou em outro, se as restrições de vazão mínima ou turbinamento máximo não estiverem ativas: o que importa, em primeira ordem, é a disponibilidade de *energia armazenada* nos reservatórios de um subsistema. E, mesmo estando ativas, a diferença de custo futuro entre estas decisões pode ser pequena, o que por sua vez reforça a necessidade de uma boa aproximação da função de custo futuro para garantir uma boa política de operação. Assim, é bastante provável que o aumento do detalhe da representação das usinas hidrelétricas *reduza* a vantagem da heurística exploratória da PDDE de utilizar as trajetórias *forward* para gerar os estados onde serão calculados os cortes a cada iteração.

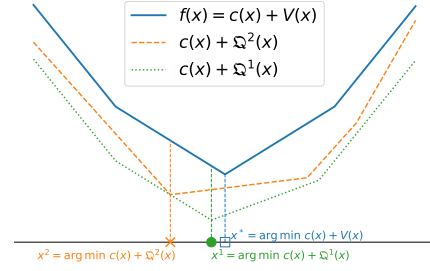
### 3.1 Mais cortes não melhoram necessariamente a qualidade da política

Outra questão relacionada à convergência do algoritmo de PDDE é a relação entre o número de cortes e a qualidade da política obtida. É bem conhecido que o algoritmo *L-shaped*, que é um algoritmo de planos cortantes para problemas de otimização estocástica de dois estágios, gera soluções candidatas cuja performance nem sempre melhora ao longo das iterações. Isto ocorre porque a aproximação da função de custo futuro, mesmo que seja cada vez “melhor”, no sentido de estar entre a aproximação anterior e a função real, conforme a equação (1), pode levar a uma *decisão* que não necessariamente resulta em uma política de melhor qualidade.

No primeiro estágio do algoritmo *L-shaped*, a decisão ótima é determinada pela minimização da função de custo imediato  $c(x)$ , somada à função de custo futuro aproximada,  $\Omega_t^k$ . Ou seja,  $x^k = \arg \min f(x) = c(x) + \Omega_t^k(x)$ , onde a função  $c(x)$  é geralmente linear. Por exemplo, na figura 1a, a função de custo futuro  $V_t$  é aproximada por duas funções  $\Omega^1$  e  $\Omega^2$ , ambas com 4 cortes. Ao somar com a função de custo imediato (que aumenta conforme o armazenamento final aumenta), obtemos a situação da figura 1b: a decisão ótima usando  $\Omega^1$  ( $x^1$ , indicada por um círculo) está mais próxima da decisão ótima do problema ( $x^*$ , marcada com um quadrado), do que a decisão ótima usando  $\Omega^2$ ,



(a) A FCF  $V_t$  e aproximações por planos cortantes.



(b) A política resultante de cada aproximação.

( $x^2$ , indicada por uma cruz). Isso ocorre apesar de a função  $\Omega^2$  possuir cortes novos, gerados por uma iteração a mais, e estar mais próxima da função  $V$ . O que se passa, de fato, é que a função de custo futuro  $\Omega^2$  é apenas uma estimativa inferior dos custos reais da decisão (da mesma forma que  $\Omega^1$ ), e portanto ambas *subestimam o custo real da decisão*. Assim, o custo real da decisão  $x^2$  será dado por  $f(x^2) = c(x^2) + V_t(x^2)$ , que será maior do que o custo real da decisão  $x^1$ , dado por  $f(x^1) = c(x^1) + V_t(x^1)$ .

Assim, se as funções de custo futuro ainda estiverem suficientemente distantes da função real, como no exemplo acima, há espaço para que, com iterações adicionais, as funções de custo futuro  $\Omega_t^k$  estejam mais próximas das funções verdadeiras  $V_t$ , mas a política induzida pelas aproximações  $\Omega_t^k$  seja muito diferente da política ótima. Portanto, é fundamental que haja suficientes iterações para garantir que, estando as funções de custo futuro suficientemente próximas das funções reais em todo o espaço de estados, não haja mais tanta diferença entre as políticas induzidas por estas aproximações e a política ótima. Observamos aqui que é exatamente esta proximidade entre a aproximação construída por planos cortantes e a função verdadeira  $V_t$  que também será importante para garantir a qualidade da solução obtida pelo modelo DECOMP.

Ora, o algoritmo de PDDE é uma aplicação recursiva do algoritmo *L-shaped* para o caso multiestágio com incertezas independentes, e portanto, também está sujeito a este fenômeno: mais iterações (e mais cortes) podem tornar as funções de custo futuro  $\Omega_t^k$  mais próximas das funções  $V_t$ , mas a política delas resultante pode não ser de melhor qualidade. Por exemplo, é bem conhecido que, ao longo das iterações do algoritmo de PDDE, diversos cortes gerados se tornam “obsoletos”, pois ficam abaixo dos novos cortes; isso acontece também quando há muita distância entre a função de custo futuro real e a aproximação  $\Omega$  corrente.

Este fenômeno é mais acentuado nas primeiras iterações, mas, vista a complexidade da aproximação das funções de custo futuro, é possível que mesmo após 6 000 cortes este fenômeno persista com oscilações significativas da política. Isso pode ser observado através de uma análise dos cortes produzidos pela PDDE: há muito menos de 1 000 cortes *ativos* (às vezes menos de 100) em vários estágios (especialmente nos primeiros meses do horizonte de planejamento), o que indica que a maioria dos cortes produzidos está muito distante das funções de custo futuro, e portanto não é tão eficiente para induzir uma boa política.

## 4 A qualidade da solução é garantida por cotas superiores

Como vimos nas seções anteriores, a convergência do algoritmo de PDDE é o ponto crucial para garantir a *qualidade* das políticas obtidas, e o número mínimo de iterações é um critério que busca garantir esta convergência. De fato, o problema subjacente a esta consulta pública é o **critério de parada** para o algoritmo de PDDE. Atualmente, o modelo calcula apenas cotas inferiores (“ $Z_{\text{inf}}$ ”), resultantes das aproximações  $\mathcal{Q}_t^k$  das funções de custo futuro, e o outro critério de parada (além dos números mínimo e máximo de iterações) é a estabilidade destas cotas inferiores.

Ora, como apresentado acima, a complexidade computacional do algoritmo de PDDE é tão grande que é possível que as cotas inferiores (calculadas pelo problema do primeiro estágio) estabilizem apesar de as funções de custo futuro  $\mathcal{Q}_t^k$  estarem a uma distância considerável das reais funções de custo futuro  $V_t$ , dada a “lentidão” da convergência em todos os estágios, e a necessária propagação para os estágios iniciais.

O padrão-ouro para algoritmos de otimização (no caso de problemas de minimização) é a construção de cotas superiores, indicando que a decisão atual resultará em custo de, no máximo, um valor específico; e de cotas inferiores, indicando que o custo de uma decisão não pode ser menor do que um (outro) valor específico. Ora, o algoritmo de PDDE calcula cotas inferiores através das aproximações das funções de custo futuro, mas há uma real dificuldade para calcular cotas superiores. A ideia mais natural seria tomar uma decisão viável e calcular o custo desta decisão, o que resultaria numa cota superior. Entretanto, este cálculo também esbarra na explosão combinatória de cenários, e é inviável na prática. A proposta original é a **estimativa amostral** do custo de uma política, ou seja, a simulação de um número grande de cenários a partir da aproximação corrente das funções de custo futuro, e o cálculo do custo médio desta decisão [PP91]. Entretanto, esta técnica é apenas prática em problemas *neutros a risco*, e o uso do CVaR aninhado no modelo NEWAVE dificulta o uso de simulação de Monte Carlo, já que o custo dos cenários impacta no peso que eles terão no CVaR.

Há duas abordagens mais recentes para o cálculo de cotas superiores, que se baseiam, de forma explícita ou implícita, na construção de funções de custo futuro  $U_t^k$  que sejam aproximações superiores de  $V_t$ , ou seja,  $U_t^k \geq V_t$  para todo  $t$  e todo  $k$ , complementando as aproximações inferiores  $\mathcal{Q}_t^k$ . A primeira abordagem [PdMF13] propõe a construção de funções de custo futuro superiores através de uma formulação dual aos cortes, realizando uma aproximação **interior** das funções de custo futuro, em vez de **exterior** como os cortes da PDDE tradicional. A segunda abordagem [FL23b] realiza a construção de funções de custo futuro **duais**  $D_t^k$ , para o *problema dual* do problema de otimização estocástico considerado. Em ambos os casos, estas construções dependem explicitamente de uma estimativa das constantes de Lipschitz das funções de custo futuro. Além dos artigos originais, estudos mais práticos já foram feitos nesta direção, como o artigo [FML24], que indica uma baixa sensibilidade dos resultados com relação às constantes estimadas, e o projeto de análise do uso de cotas superiores em problemas de planejamento energético realizado pelo ONS [dCdsB<sup>+</sup>24].

Atualmente, o maior desafio é empregar, de forma numericamente eficiente, estas técnicas de cotas

superiores aos modelos que incorporam a tendência hidrológica. Tais modelos codificam a dinâmica de um processo estocástico autorregressivo num espaço de estados aumentado (incluindo as afluições passadas) em que não há controle — apenas o impacto da inovação estatística a cada estágio. Com isto, o problema de aproximação superior fica mal-condicionado, como visto em [dCdSB<sup>+</sup>24], o que reduz significativamente a velocidade de convergência das cotas superiores  $U_t^k$ .

Vale ressaltar que existe uma terceira proposta para o cálculo de cotas superiores, de forma estatística, que usa uma amostragem *enviesada pelo CVaR* dos cenários [GLCP23]. Esta técnica possui um viés *para baixo*, ou seja, é um estimador estatístico (e não determinístico, como o  $Z_{\text{inf}}$ ) que tende a *subestimar* o custo da política simulada. Apesar deste viés, esta técnica é interessante por não necessitar a construção de funções de custo futuro superiores, e é relativamente simples de ser implementada.

## 5 A estabilidade da solução depende da amostragem de cenários

Outra questão adjacente ao critério de parada do modelo NEWAVE é a estabilidade das soluções obtidas, pois podemos observar que, ao realizar uma iteração suplementar, as decisões calculadas pelo modelo mudam de forma significativa.

Ora, um problema semelhante ocorre ao alterar a amostragem de cenários, ou seja, ao realizar uma nova amostragem da incerteza: as funções de custo futuro  $V_t$  também poderiam mudar de forma significativa — quiçá ainda mais do que ao acrescentar uma nova iteração. Isto ocorre porque a árvore de cenários construída pela PDDE contém apenas uma amostra do contínuo de cenários possíveis de serem realizados em um mês. Atualmente, são usadas 20 amostras da incerteza a cada estágio, o que é um número **muito baixo** vista a dimensão do espaço de incertezas — da ordem do número de usinas hidrelétricas ou REEs.

Um teste, que consiste em realizar amostras diferentes da incerteza em rodadas diferentes do modelo NEWAVE, é o primeiro passo fundamental para entender o impacto dos cenários amostrados, e determinar um número *razoável* de cenários que garante que a solução construída não esteja sobreajustada aos cenários escolhidos. Este sobre-ajuste é bem conhecido em otimização estocástica, já sendo indicado em [SDR09] e [BL11, Chapter 9.1].

Um estudo nesta direção foi realizado em 2015 para o caso específico do modelo NEWAVE da época [SCdC15], e já indicava, para um sistema com 4 REEs, que um número de cenários razoável para garantir a estabilidade da solução era da ordem de 100 aberturas por estágio. Atualmente, com uma dimensão ainda maior do espaço de incertezas, é bastante provável que este número de cenários necessário para garantir a estabilidade da solução seja também maior.

## 6 A redução do tempo computacional pelo horizonte infinito

Enfim, também é importante indicar que, mesmo que a passagem de 30 para 50 iterações mínimas do modelo NEWAVE não resulte necessariamente em uma mudança significativa da qualidade das políticas obtidas (vista, novamente, a dimensão do espaço de estados do segundo estágio que fornece a função de custo futuro para o modelo DECOMP), este aumento modesto reflete uma preocupação séria com relação aos recursos computacionais necessários para obter uma solução de melhor qualidade.

Neste sentido, é importante destacar que já existe uma proposta bastante consistente de uso de modelos de horizonte infinito e periódico, que têm a vantagem de calcular apenas 12 funções de custo futuro, o que acelera sua convergência, e também não apresenta as dificuldades práticas de calibração de um *horizonte suplementar* para estabilizar as funções de custo futuro, como é o caso do modelo NEWAVE atual. Ademais, os modelos considerando horizonte infinito geram políticas mais consistentes e com uma melhor qualidade: como visto no caso de estudo do projeto de horizonte infinito realizado pelo ONS [dCdOCF<sup>+</sup>21], um modelo de horizonte finito usa - em média - menos geração térmica e mais geração hidráulica, mas acaba incorrendo em maiores custos de operação, pois a geração térmica é usada de forma mais variável, e, ao necessitar de unidades com maior CVU, acaba incorrendo em custos muito maiores, que não são compensados pela economia de menores custos no restante do período.

Uma outra vantagem que os modelos de horizonte infinito possuem é que eles podem ser rodados offline (ou seja, sem prazos tão exíguos como exigidos pelo rito do PMO), com baixa periodicidade. Isto também torna viável que estes modelos de horizonte infinito utilizem uma amostragem com maior número de cenários e realizem muito mais iterações do que hoje é praticado, o que seria um primeiro passo para garantir uma boa aproximação das funções de custo futuro. Em seguida, um modelo NEWAVE, com horizonte mais curto, poderia ser acoplado com esta função de custo futuro pré-calculada pelo modelo de horizonte infinito, o que também permitiria que este modelo já possuísse um *warm-start* e que, ademais, por possuir menos estágios e conseqüentemente menos funções de custo futuro a serem aproximadas, também poderia realizar mais iterações.

## 7 Proposta e Recomendações

Dado o exposto acima, em especial a complexidade do problema de otimização estocástica tratado pelo modelo NEWAVE (devido à alta dimensão do espaço de estados), a proposta de aumento do número mínimo de iterações de 30 para 50 iterações pode ser interessante, mas provavelmente não será suficiente para garantir uma mudança significativa na qualidade das políticas obtidas. Ademais, ao fixar, na prática, o número de iterações em 50 estamos estabelecendo um critério de parada e deixando de observar a variabilidade da qualidade da solução ao longo das iterações, que é um indicativo claro de que o algoritmo de PDDE ainda não convergiu.

Mais importante do que simplesmente aumentar o número de iterações, recomendamos proceder a uma análise detalhada das funções de custo futuro construídas a cada iteração, e a diferença entre as

mesmas ao longo de um grande número de iterações. Isto seria um passo importante para entender a relação entre o número de iterações e a qualidade da solução obtida e embasaria melhor a definição de um critério de convergência, e não apenas “de parada”. Uma possibilidade é analisar a quantidade de corte ativos a cada iteração, e observar o quanto novos cortes dominam os anteriores: enquanto isto acontecer, é provável que o algoritmo de PDDE esteja apenas incorporando um aumento do custo dos estágios seguintes, sem ainda acrescentar detalhes razoáveis para a função de custo futuro do estágio atual. Recomendamos, em especial, levar em conta o número de cortes ativos no estágio de acoplamento com o modelo DECOMP como parte critério de convergência, visto que, para o PMO, o que importa é a função de custo futuro que informa as consequências da política de médio prazo nas decisões de curto prazo.

Um outro passo importante para garantir a qualidade da solução é a construção de cotas superiores para as funções de custo futuro, o que permitiria construir um *gap* de otimalidade, e portanto um critério de convergência mais robusto do que o número de iterações ou a estabilidade das cotas inferiores.

Enfim, gostaríamos de ressaltar que o uso de um modelo periódico de horizonte infinito permitiria reduzir o tempo de computação necessário para obter uma solução de melhor qualidade, possibilitando incorporar tanto um maior número de cenários (para evitar o sobre-ajuste a uma amostra específica de cenários de incerteza afetando 163 ou 12 dimensões do problema) quanto estimativas de cotas superiores que dariam uma maior confiança na qualidade da solução.

## Referências

- [BL11] John R. Birge and François Louveaux. *Introduction to Stochastic Programming*. Springer, 2nd edition, 2011.
- [CP99] Z. L. Chen and W. B. Powell. Convergent cutting-plane and partial-sampling algorithm for multistage stochastic linear programs with recourse. *Journal of Optimization Theory and Applications*, 102(3):497–524, September 1999.
- [dCdOCF<sup>+</sup>21] Bernardo Freitas Paulo da Costa, Anderson de Oliveira Calixto, Ricardo Turano Figueiredo, Débora Dias Jardim Penna, Alessandra Mattos Ramos de Oliveira, and Lucas de Souza Khenayfis. Problemas de otimização estocástica em horizonte periódico. Relatório técnico, Convênio ONS – UFRJ, 2021. Horizonte Infinito – Relatório Final.
- [dCdSB<sup>+</sup>24] Bernardo Freitas Paulo da Costa, Cleyton Vinicius Prado dos Santos, Luís Henrique Domingues Bueno, Maria Soledad Aronna, Vincent Gérard Yannick Guigues, Lucas de Souza Khenayfis, Débora Dias Jardim Penna, Alessandra Mattos Ramos de Oliveira, Rogerio José Menezes Alves, and Mariana Simões Noel da Silva. Cotas superiores para problemas de otimização estocástica. Relatório técnico, Convênio ONS – FGV, 2024. Cotas Superiores – Relatório Final.

- [FL23a] Maël Forcier and Vincent Leclère. Trajectory following dynamic programming algorithms without finite support assumptions. *Journal of Convex Analysis*, 30(3):951–999, 2023.
- [FL23b] Bernardo Freitas Paulo da Costa and Vincent Leclère. Dual SDDP for risk-averse multistage stochastic programs. *Operations Research Letters*, 51(3):332–337, 2023.
- [FML24] Bernardo Freitas Paulo da Costa, Lucas Merabet, and Vincent Leclère. Policy with guaranteed risk-adjusted performance for multistage stochastic linear problems, 2024.
- [GLCP23] Joaquim Dias Garcia, Iago Leal, Raphael Chabar, and Mario Veiga Pereira. A multicut approach to compute upper bounds for risk-averse sddp, 2023.
- [Lan20] Guanghai Lan. Complexity of stochastic dual dynamic programming. *Mathematical Programming*, 191(2):717–754, February 2020.
- [PdMF13] Andy Philpott, Vitor de Matos, and Erlon Finardi. On solving multistage stochastic programs with coherent risk measures. *Operations Research*, 61(4):957–970, 2013.
- [PG08] A.B. Philpott and Z. Guan. On the convergence of stochastic dual dynamic programming and related methods. *Operations Research Letters*, 36(4):450–455, 2008.
- [PP91] Mario VF Pereira and Leontina MVG Pinto. Multi-stage stochastic optimization applied to energy planning. *Mathematical programming*, 52(1-3):359–375, 1991.
- [SCdC15] Alexander Shapiro, Filipe Cabral, and Joari Paulo da Costa. Guidelines for choosing parameters  $\lambda$  and  $\alpha$  for the risk averse approach, 2015.
- [SDR09] Alexander Shapiro, Darinka Dentcheva, and Andrzej Ruszczyński. *Lectures on stochastic programming: modeling and theory*. SIAM, 2009.